التكامل المحدود:

نظرية:

إذا كانت الدالة د متصلة في الفترة [أ، ب] وكانت ق(س) دالة مقابلة للدالة د(س) في نفس الفترة فإن:

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}.\,\text{ءس} = \text{ق(س)}\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}} = [\,\text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}\,].$$

إذا كان م(س) دالة مقابلة للدالة ق (س) وكان م (−٢) = ٧، م (٥) = ١٣ ، فأوجد :

$$\int_{-٢}^{٥} \text{ق (س)}.\,\text{ء س}$$

الحل :

$$\int_{-٢}^{٥} \text{ق (س)}.\,\text{ء س} = \text{م (٥)} - \text{م (−٢)}$$

$$= ١٣ - ٧ = ٦$$

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (٤\text{س} - ٥)\,.\,\text{ءس} = ٦٥$، أ + ب = ٩.

أوجد قيمة أ.

الحل :

$$[\,٢\text{س}^٢ - ٥\text{س}\,]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = ٦٥$$

$$(٢\text{ب}^٢ - ٥\text{ب}) - (٢\text{أ}^٢ - ٥\text{أ}) = ٦٥$$

بالتعويض عن أ = ٩ − ب

$$٢\text{ب}^٢ - ٥\text{ب} - (١٦٢ - ٣٦\text{ب} + ٢\text{ب}^٢) + ٤٥ - ٥\text{ب} = ٦٥$$

∴ ب = ٧

أ = ٩ − ٧ = ٢

أوجد قيمة :

أ) $\int_{٢}^{٤} \left(\text{س}^٢ + \frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{١}{(\text{س}+٥)^٢}\right).\,\text{ءس}$

ب) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}} \int_{٢}^{٣} (\text{س}^٦ - ٣).\,\text{ءس}$.

أ)

$$\int_{٢}^{٤} \left(\text{س}^٢ + ٢\text{س}^{-٢} - (\text{س}+٥)^{-٢}\right) \text{ء س}$$

$$= \frac{١}{٣}\text{س}^٣ - \frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{(\text{س}+٥)}\Big|_{٢}^{٤}$$

$$\approx ١٩$$

ب)

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left[\,\text{س}^٧ - ٣\text{س}\,\Big|_{٢}^{٤}\,\right]$$

$$= \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} [٢٠٥٦]$$

$$= \text{صفر}$$

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى د(س) = ٤س − س² في الفترة [١،٢] ومحور السينات.

الحل :

$$\text{م} = \int_{١}^{٢} (٤\text{س} - \text{س}^٢)\,.\,\text{ءس}$$

$$= ٢\text{س}^٢ - \frac{١}{٣}\text{س}^٣\Big]_{١}^{٢}$$

$$= \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(٢ - \frac{١}{٣}\right)$$

$$= \frac{١١}{٣}$$

خواص التكامل المحدود:-

١) خاصية اللاتغير في الإشارة :

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في الفترة [أ ، ب] ، وكانت د(س) $\geq$ ٠ لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} \geq ٠$$

٢) خاصية المقارنة :

إذا كانت كل من د(س) ، هـ(س) دالتين قابلتين للتكامل في [أ ، ب] ، وكانت د(س) $\leq$ هـ(س) لكل س $\in$ [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} \leq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) . ءس}$$

٣) خاصية اللا تغير عند الانسحاب :

إذا كانت ق(س) قابلة للتكامل على الفترة [أ ، ب] فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . ءس} = \int_{\text{أ + جـ}}^{\text{ب + جـ}} \text{ق(س − جـ) . ءس .}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س) . ءس} = \int_{\text{أ − جـ}}^{\text{ب − جـ}} \text{ق(س + جـ) . ءس .}$$

٤) خاصية الإضافة :

إذا كانت د(س) قابلة للتكامل في الفترة [أ ، ب] وكان أ $<$ جـ $<$ ب فإن :

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س) . ءس} + \int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس}$$

- خاصيتا تبديل الحدود والتكامل عند نقطة .

٥) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) . ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س) . ءس}$

٦) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{د(س) . ءس} = \text{صفر}$

أ) وضح بدون حساب قيمة التكامل أن $\int_{-٢}^{٢} \text{(س}^٢ + ١\text{) . ءس} \geq ٠$.

ب) إذا كانت د(س) $\geq$ هـ(س) ، لكل س $\in$ [أ ، ب] . فاثبت أن

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{(د(س) − هـ(س)) . ءس} \geq ٠ .$$

أ) $\because$ س$^٢ \geq ٠$ $\forall$ س $\in$ [-٢، ٢]

$\therefore$ س^٢ + ١ $>$ ٠ في تلك الفترة

$\therefore \int_{-٢}^{٢} \text{(س}^٢+١\text{) ء س} \geq ٠$

ب) $\because$ د(س) $\geq$ هـ(س)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} \geq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ء س}$$

$$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س) ء س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س) ء س} \geq ٠$$

$$\therefore \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{(د (س) − هـ (س)). ء س} \geq ٠$$

إذا كان $\int_{١}^{٣} \text{(٣س}^٢ + ٤\text{أ) . ء س} = ٥٠$ أوجد أ .

الحل :

$$\int_{١}^{٣} \text{(٣س}^٢ + ٤\text{أ). ءس} = \Big[\text{س}^٣ + ٤\text{أ س}\Big]_{١}^{٣} = ٥٠$$

$$(٢٧ - ١) + ٨\text{أ} = ٥٠$$

$$\therefore \text{أ} = ٣$$

إذا كان ق(س) $\leq$ ٦ لجميع قيم س $\in$ [٢، ٥] فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٥} ٤ \text{ ق(س). ء س}$ ؟

الحل :

$$\text{ق(س)} \leq ٦ \Leftarrow \int_{٢}^{٥} \text{ق(س) . ءس} \leq \int_{٢}^{٥} ٦ \text{. ء س}$$

$$\Leftarrow \int_{٢}^{٥} \text{ق(س). ء س} \leq ٦ \times ٣ = ١٨$$

أكبر قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٥} \text{ق(س). ء س} = ١٨$

أكبر قيمة للمقدار $\int_{٢}^{٥} ٤\text{ق(س). ء س} = ٤ \times ١٨ = ٧٢$

اثبت بدون حساب التكامل أن :

$$\int_{-١}^{٢} (\text{س}^٢+١)\,.\,\text{ءس} \geq \int_{-١}^{٢} (\text{س}-١)\,.\,\text{ءس}\,.$$

$\because$ $\text{س}^٢+١ > ١ \;\forall\; \text{س} \in [-١ ، ٢]$

$\text{س}-١ \leq ١ \;\forall\; \text{س} \in [-١ ، ٢]$

$\therefore$ $(\text{س}^٢+١) \geq (\text{س}-١)$ في الفترة $[-١ ، ٢]$

$\therefore$ $\int_{-١}^{٢} (\text{س}^٢+١)\,\text{ءس} \geq \int_{-١}^{٢} (\text{س}-١)\,\text{ءس}$

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}.\,\text{ءس} = ٤$ فأوجد $\int_{\text{أ}-٣}^{\text{ب}-٣} \text{ق}(\text{س}+٣)\,.\,\text{ءس}\,.$

باستخدام خاصية اللاتغيير عند الانسحاب

$$\int_{\text{أ}-٣}^{\text{ب}-٣} \text{ق}(\text{س}+٣)\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}-٣+٣}^{\text{ب}-٣+٣} \text{ق}(\text{س}+٣-٣)\,\text{ءس}$$

$$= \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\,\text{ءس}$$

$$= ٤$$

تغيير حدود التكامل.

اعتبر $\text{د(س)} = ٢\text{س} + ١$

أوجد $\int_{١}^{٣} \text{د(س)}\,.\,\text{ءس} = \left[\text{س}^٢ + \text{س}\right]_{١}^{٣} = ١٠$

أوجد $\int_{٥}^{٧} \text{د}(\text{س}-٤)\,.\,\text{ءس} = \int_{٥}^{٧} (٢(\text{س}-٤)+١)\,.\,\text{ءس}$

$$= \int_{٥}^{٧} (٢\text{س}-٧)\,.\,\text{ءس} = \left[\text{س}^٢ - ٧\text{س}\right]_{٥}^{٧}$$

$$= ٠ - (٢٥ - ٣٥) = ١٠$$

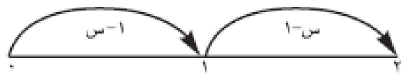
لاحظ أن الإجابتين متساويتان فما وجه الشبه والإختلاف بين

$$\int_{١}^{٣} \text{د(س)}.\,\text{ءس} \;،\; \int_{٥}^{٧} \text{د}(\text{س}-٤).\,\text{ءس}$$

لاحظ عندما أنقصنا ٤ من المتغير س أضفنا العدد نفسه إلى حدود التكامل .

إذا كانت $\text{د(س)} = |\text{س}-١|$ ، $\text{س} \in [٠ ، ٢]$ ،

عبر عن $\int_{٠}^{٢} \text{د(س)}\,\text{ءس}\,.$



$$|\text{س}-١| = \begin{cases} ١-\text{س} & ،\ \text{س} \leq ١ \\ \text{س}-١ & ،\ \text{س} > ١ \end{cases}$$

$$\int_{٠}^{٢} |\text{س}-١|\,.\,\text{ءس}$$

$$= \int_{٠}^{١} (١-\text{س})\,.\,\text{ءس} + \int_{١}^{٢} (\text{س}-١)\,.\,\text{ءس} = ١$$

عبر بتكامل واحد :

$$\int_{-٢}^{١} \sqrt{\text{س}+١}\,.\,\text{ءس} - \int_{٥}^{١} \sqrt{\text{س}+١}\,.\,\text{ءس}$$

$$\int_{-٢}^{١} \sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس} - \int_{٥}^{١} \sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{١} \sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٥} \sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{٥} \sqrt{\text{س}+١}\,\text{ءس}$$

إذا كان $\int_{١}^{٦} \text{ق(س)}.\,\text{ءس} = ١٢$. فأوجد :

١) $\int_{١}^{٦} (٣\,\text{ق(س)} - ٢\text{س} + ٢)\,.\,\text{ءس}$

٢) $\int_{٦}^{١} (\text{ق(س)} + ١)\,.\,\text{ءس}$

الحل :

١) $\int_{١}^{٦} (٣\,\text{ق(س)} - ٢\text{س} + ٢)\,.\,\text{ءس}$

$$= ٣ \times ١٢ - \left[\text{س}^٢ + ٢\text{س}\right]_{١}^{٦} = ١١$$

٢) $\int_{٦}^{١} (\text{ق(س)} + ١)\,.\,\text{ءس} = -١٢ + (١ - ٦)$

$$= -١٧$$

إذا كانت

$$\text{د(س)} = \begin{cases} ٣\text{س} - ٢ & ،\ \text{س} \leq ٢ \\ \text{س}^٢ - ٢\text{س} & ،\ \text{س} > ٢ \end{cases}$$

أ) $\int_{٠}^{٤} \text{د(س)}\,\text{ءس} = \int_{٠}^{٢} (٣\text{س}-٢)\,\text{ءس} + \int_{٢}^{٤} (\text{س}^٢-٢\text{س})\,\text{ءس}$

$$= \left.\frac{٣}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س}\right|_{٠}^{٢} + \left.\frac{\text{س}^٣}{٣} - \text{س}^٢\right|_{٢}^{٤}$$

$$= \left[(٦-٤)-(٠)\right] + \left[\left(\frac{٦٤}{٣}\right)-١٦)-\left(\frac{٨}{٣}-٤\right)\right]$$

$$= ٨\frac{٢}{٣}$$

ب) $\int_{-٢}^{١} (٣\text{س}-٢)\,\text{ءس}$

$$= \left.\frac{٣}{٢}\text{س}^٢ - ٢\text{س}\right|_{-٢}^{١}$$

$$= \left[\left(\frac{٣}{٢}-٢\right) - (٦+٤)\right]$$

$$= -١٠,٥$$

أوجد $\int_{-1}^{2} \sqrt{2+|\text{س}|}\;\text{ءس}$

الحل :

بإعادة تعريف $|\text{س}|$

$$|\text{س}| = \begin{cases} \text{س} & ، \text{س} \geqslant 0 \\ -\text{س} & ، \text{س} < 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{2+|\text{س}|}\;\text{ءس}$$

$$= \int_{-1}^{0} (2-\text{س})^{\frac{1}{2}}\;\text{ءس} + \int_{0}^{2} (2+\text{س})^{\frac{1}{2}}\;\text{ءس}$$

$$= \left[\frac{-2}{3}(2-\text{س})^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2}{3}(2+\text{س})^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2}$$

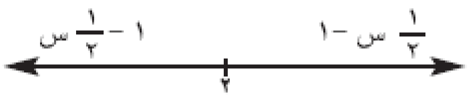
$$= \frac{16}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{27} - \frac{4}{3}\sqrt{8}$$

أوجد قيمة :

1) $\int_{-2}^{3} (3\text{س}+1)\;\text{ءس}$

2) $\int_{-\text{ك}}^{\text{ك}} (2\text{س}^2 - 4\text{س} + 5)\;\text{ءس}$

أوجد قيمة $\int_{1}^{5} \left|\frac{1}{2}\text{س} - 1\right|\;\text{ءس}$.



$$\left|\frac{1}{2}\text{س} - 1\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}\text{س} - 1 & ، \text{س} \geqslant 2 \\ 1 - \frac{1}{2}\text{س} & ، \text{س} < 2 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{5} \left|\frac{1}{2}\text{س} - 1\right|\text{ءس} = \int_{1}^{2} \left(1 - \frac{1}{2}\text{س}\right)\text{ءس} + \int_{2}^{5} \left(\frac{1}{2}\text{س} - 1\right)\text{ءس}$$

$$= \left(\text{س} - \frac{1}{4}\text{س}^2\right)\Big|_{1}^{2} + \left(\frac{1}{4}\text{س}^2 - \text{س}\right)\Big|_{2}^{5}$$

$$= 2{,}5$$

أوجد قيمة $\int_{1}^{4} [\text{س} - 6]\;\text{ءس}$.

إذا كان $\text{م} < 0 < \text{ب}$ ، $\text{م} - \text{ب} = -6$ ، $\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}}\;\text{ءس} = 2$. فأوجد قيمة م .

الحل :

لقيم $\text{م} < \text{س} < 0$ فإن $|\text{س}| = -\text{س}$ ، $0 < \text{س} < \text{ب}$ فإن $|\text{س}| = \text{س}$

$$\int_{\text{م}}^{\text{ب}} \frac{|\text{س}|}{\text{س}}\;\text{ءس} = \int_{\text{م}}^{0} \frac{-\text{س}}{\text{س}}\;\text{ءس} + \int_{0}^{\text{ب}} \frac{\text{س}}{\text{س}}\;\text{ءس}$$

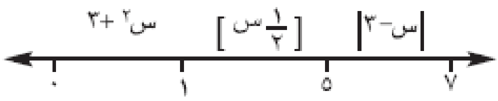
$$= \int_{\text{م}}^{0} -1\;\text{ءس} + \int_{0}^{\text{ب}} 1\;\text{ءس} = [-\text{س}]_{\text{م}}^{0} + [\text{س}]_{0}^{\text{ب}} = \text{م} + \text{ب} = 2$$

بحل المعادلتين : $\text{م} - \text{ب} = -6$ ، $\text{م} + \text{ب} = 2$

$\therefore \text{م} = -2$

إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3 & ، \text{س} \leqslant 1 \\ \left[\frac{1}{2}\text{س}\right] & ، 1 < \text{س} < 5 \\ |\text{س} - 3| & ، \text{س} \geqslant 5 \end{cases}$

فأوجد $\int_{0}^{7} \text{ق}(\text{س})\;\text{ءس}$.



$$\because \left[\frac{1}{2}\text{س}\right] = \begin{cases} 1 & ، 1 < \text{س} \leqslant 3 \\ 2 & ، 3 < \text{س} < 5 \end{cases}$$

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 3 & ، \text{س} \leqslant 1 \\ 1 & ، 1 < \text{س} < 3 \\ 2 & ، 3 \leqslant \text{س} < 5 \\ \text{س} - 3 & ، 5 \leqslant \text{س} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{0}^{7} \text{ق}(\text{س}) = \int_{0}^{1} (\text{س}^2+3)\,\text{ءس} + \int_{1}^{3} 1\,\text{ءس} + \int_{3}^{5} 2\,\text{ءس}$$

$$+ \int_{5}^{7} (\text{س}-3)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{40}{3}$$

إذا كان $\int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\;.\;\text{ءس} = 15$

فما مقدار : $\int_{-3}^{2} 2\,\text{د}(\text{س}+2)\;\text{ءس}$

$$\int_{-3}^{2} 2\,\text{د}(\text{س}+2)\;\text{ءس} = 2\int_{-1}^{4} \text{د}(\text{س})\;.\;\text{ءس}$$

$$= 2 \times 15$$

$$= 30$$

تمارين ومسائل على التكامل المحدود:

١) أ) $\int_{0}^{1} \frac{س+1}{(س^2+2س+1)^4}\, ء س = \int_{0}^{1} \frac{س+1}{(س+1)^8}\, ء س$

$= \int_{0}^{1} (س+1)^{-7}\, ء س = \left. \frac{(س+1)^{-6}}{-6} \right|_{0}^{1}$

$= \frac{-1}{384} + \frac{1}{6} = \frac{63}{384}$

ب) $\int_{-1}^{0} (2-س)^4\, ء س = \left. \frac{-(2-س)^5}{5} \right|_{-1}^{0}$

$= \frac{211}{5}$

جـ) ∵ طول الفترة $= \frac{1}{|\text{معامل س}|} = 2$

$\int_{0}^{5} [\frac{س}{2} + 1]\, .ء س$

$= \int_{0}^{2} 1 .ء س + \int_{2}^{4} 2 .ء س + \int_{4}^{5} 2 .ء س$

$= 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 9$

وذلك لأن:

$[\frac{1}{2}س + 1] = \begin{cases} 1 & ، \ 0 \leqslant س < 2 \\ 2 & ، \ 2 \leqslant س < 4 \\ 3 & ، \ 4 \leqslant س < 6 \end{cases}$

د) $\frac{-1}{8}\left(\frac{1}{81} - \frac{1}{625}\right)$

هـ) $\frac{5}{2}$

و) $\int_{-1}^{2} (3 - س)\, .ء س$

$= \left[3س - \frac{1}{2}س^2 \right]_{-1}^{2} = \frac{15}{2}$

٢) أ) $\int_{4}^{9} 2 س^{\frac{3}{2}}\, ء س = \left. \frac{2 \times 2}{5} س^{\frac{5}{2}} \right|_{4}^{9}$

$= \left. \frac{4}{5} \sqrt{س^5} \right|_{4}^{9} = \frac{4}{5}\left[\sqrt{(9)^5} - \sqrt{(4)^5}\right]$

$= \frac{4}{5}[243 - 32] = 168.8$

ب) $\int_{-1}^{2} (س + س^4)\, ء س = \left[\frac{س^2}{2} + \frac{س^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \frac{81}{10}$

٣) $\int_{1}^{ب} (2س - 1)\, ء س = 6 \Leftarrow \left. س^2 - س \right|_{1}^{ب} = 6$

∴ $(ب^2 - ب) - (0) = 6$

$ب^2 - ب = 6$

$ب^2 - ب - 6 = 0 \Leftarrow (ب - 3)(ب + 2) = 0$

ب = ٣ ، −٢ مرفوض لماذا ؟

ب = ٣

٤) $\int_{0}^{2} 3س^2 \sqrt{س^3 + 1}\, .ء س = \left. \frac{2}{3} (س^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right|_{0}^{2}$

$= \frac{52}{3}$

٥) $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{س+1} - \sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س+1} + \sqrt{س}}{\sqrt{س+1} + \sqrt{س}}\, ء س$

$= \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{س+1} + \sqrt{س}}{س + 1 - س}\, ء س$

$= \left. \frac{2}{3} (س+1)^{\frac{3}{2}} \right|_{0}^{1} + \left. \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} \right|_{0}^{1}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$

٧) $5\int_{-1}^{1} ق(س)\, .ء س + 2\int_{-1}^{1} هـ(س)\, .ء س = 30$

$5 \times 4 + 2\int_{-1}^{1} هـ(س)\, .ء س = 30$

∴ $\int_{-1}^{1} هـ(س)\, .ء س = 5$

٨) $د(س) = \begin{cases} 3س^2 - س & ، \ س \leqslant 0 \\ 3س^2 + س & ، \ س > 0 \end{cases}$

$\int_{-1}^{4} د(س).ءس = \int_{-1}^{0} (3س^2 - س)\, .ء س + \int_{0}^{4} (3س^2 + س).ءس$

$= 73.5$

٩) $\int_{2}^{أ} (2 - 2س)\, ءس = \left. 2س - س^2 \right|_{2}^{أ} = 0$

$= أ(2 - أ) = 0$

اما أ = ٠ أو أ = ٢

∴ قيم أ = ٠ ، ٢

٦) ∵ طول الفترة = ٢

$\begin{cases} 1 & ، \ 2 \leqslant س < 4 \\ 2 & ، \ 4 \leqslant س < 6 \\ 3 & ، \ س = 6 \end{cases}$

∴ $\int_{2}^{6} [\frac{س}{2}]\, ءس = \int_{2}^{4} ءس + \int_{4}^{6} 2ءس + \int_{6}^{6} 3\, ءس$

$= \left. س \right|_{2}^{4} + \left. 2س \right|_{4}^{6} + \left. 3س \right|_{6}^{6}$

$= (4 - 2) + 2(6 - 4) + 3(6 - 6)$

$= 6$